-Lycée : Elamel Fouchana

- Classes : 4éme T1+T2+T3

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

-Date : 07/03/2013

-Durée : 3h

Exercice n°1 : (3points)

Cocher la réponse exacte en justifiant la réponse

1. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-3x+2} =$
   a) 0 ; b) 1 ; c) – 1
2. Si x est un réel de] – 1, 0[alors $\ln(x^2 + x) =$
   a) $\ln x + \ln(x+1)$; b) $\ln x^2 + \ln(x+1)$; c) $\ln(-x) + \ln(x+1)$
3. Si A,B ,C et D sont quatre points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BD}$ alors :
   a) (AB) // (CD) ; b) A, B et C sont alignés ; c) (AB)⊥ (BD)
4. Si $(o ;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace alors : $(\vec{\imath}-\vec{\jmath}) \wedge (\vec{\imath}+\vec{\jmath})=$
   a) $\vec{k}$; b) $2\vec{k}$; c) $-2\vec{k}$

Exercice n°2 : (6points)

I/Soit g la fonction définie sur]0 ;+∞[par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

1. Dresser le tableau de variation de g
2. En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x]0 ;+∞[

II/Soit f la fonction définie sur]0 ;+∞[par $f(x) = x+2 + \frac{\ln x}{x}$

1. a)Montrer que f est dérivable sur]0 ;+∞[et que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
   b) Dresser le tableau de variation de f
2. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
   a)Montrer que Δ : y= x+2 est une asymptote à (C)
   b) Etudier la position de (C) et Δ
3. a)Montrer que f réalise une bijection de]0 ;+∞[sur IR
   b)Calculer f(1). En déduire $(f^{-1})'(3)$
4. Soit (C') la courbe représentative de f^{-1} dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
   a)Préciser les asymptotes de (C')
   b)Tracer (C) et (C')

Exercice n°3 : (6points)

Dans l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct ; on considère les points A(0 ;1 ;0) ; B(1 ; 0 ;- 2) ; C(0 ;0 ;-1) et D(1 ; -1 ;0)

1. a)Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
   b) En déduire une équation cartésienne du plan P passant par A,B et C

2. a)Montrer que ABCD est un tétraèdre
   b) Calculer le volume de ABCD
3. a)Calculer l'aire du triangle ABC
   b) Vérifier que C est le projeté orthogonal de D sur le plan P
   c)En déduire la distance du point D au plan P
4. Soit S l'ensemble des points M (x ;y ;z) tels que : $x^2+y^2 + z^2 – 2x + 2y – 2=0$
   a)Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon
   b)Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon

Exercice n°4 : (5points)

f désigne une fonction dérivable sur IR et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

- ($\mathcal{C}$) admet une branche infinie parabolique de direction $(o,\vec{\imath})$
- Le tableau de variation de *f* est le suivant

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	+	
f(x)	-1	↘	-3	↗	1	↗	$+\infty$

I/

1. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution α unique dans]0 ;3[
2. Donner suivant les valeurs de x , le signe de f(x)
3. Ecrire l'équation de la tangente T à ($\mathcal{C}$)au point d'abscisse 3
4. Tracer ($\mathcal{C}$) (on prendra $\alpha = 2$)

II/ Soit F la fonction définie par F(x) = ln(f(x))

1. Déterminer le domaine de définition de F
2. Déterminer $\lim_{x\to\alpha^+} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$
3. Montrer que ($\mathcal{C}_F$) admet une branche infinie de direction $(o,\vec{\imath})$
4. Dresser le tableau de variation de F
5. Montrer que le point I(3,0) est un point d'inflexion pour ($\mathcal{C}_F$)
6. Déterminer la primitive sur [3 ;+∞[qui s'annule en 3 de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{f(x)+f'(x)}{f(x)}$